

Epreuve de Mathématiques. Février 2023 (20pts) Coef : 7

Présentation : 0.5pt

EVALUATION DES RESSOURCES

**Exercice 1 (4.5pts)**

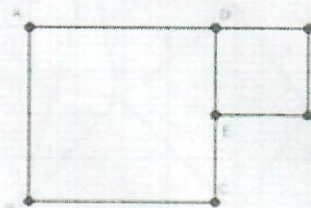
Le but de l'exercice est de montrer qu'il existe un entier naturel  $n$  dont l'écriture décimale du cube se termine par 2009, c'est-à-dire tel que  $n^3 \equiv 2009[10\ 000]$ .

- Déterminer le reste de la division euclidienne de  $2009^2$  par 16 et déduire que  $2009^{8001} \equiv 2009[16]$ . (0.5pt)
- On considère la suite  $(u_n)$  définie sur  $\mathbb{N}$  par :  $u_0 = 2009^2 - 1$  et, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} = (u_n + 1)^5 - 1$ .
  - Démontrer que  $u_0$  est divisible par 5. (0.25pt)
  - Démontrer que pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} = u_n(u_n^4 + 5(u_n^3 + 2u_n^2 + 2u_n + 1))$ . (0.5pt)
  - Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n$  est divisible par  $5^{n+1}$ . (0.75pt)
- Vérifier que  $u_3 = 2009^{250} - 1$  puis en déduire que  $2009^{250} \equiv 1[625]$ . (0.5pt)
- Démontrer alors que  $2009^{8001} \equiv 2009[625]$ . (0.5pt)
- Soient  $a$ ,  $b$  et  $c$  des entiers naturels
  - Montrer que si  $a$  divise  $c$  et  $b$  divise  $c$  avec  $a$  et  $b$  premiers entre eux, alors le produit  $ab$  divise  $c$ . (0.5pt)
  - En se servant des questions précédentes, montrer que  $2009^{8001} - 2009$  est divisible par 10 000. (0.5pt)
- Conclure, c'est-à-dire déterminer un entier naturel dont l'écriture décimale du cube se termine par 2009. (0.5pt)

**Exercice 2 (3pts)**

$ABCD$  et  $DEFG$  sont des carrés de sens direct tel que  $E$  est le milieu de  $[CD]$ .

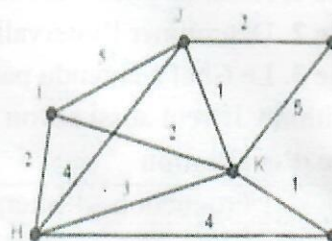
- Soit  $S$  la similitude directe de centre  $D$  qui transforme  $A$  en  $B$ 
  - Déterminer les éléments caractéristiques de  $S$ . (0.5pt)
  - Déterminer l'image de  $E$  par  $S$  et la mesure principale de l'angle  $(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{BF})$ . (0.5pt)
- On désigne par  $(C)$  le cercle de diamètre  $[BD]$  et par  $K$  le point d'intersection des droites  $(AE)$  et  $(BF)$ .
  - Démontrer que  $K$  appartient à  $(C)$ . (0.5pt)
  - En déduire que  $(KD)$  et  $(BF)$  sont perpendiculaires. (0.5pt)
- On désigne par  $(C')$  le cercle de diamètre  $[DF]$ .
  - Démontrer que  $K$  appartient à  $(C')$ . (0.5pt)
  - En déduire que les points  $C$ ,  $G$  et  $K$  sont alignés. (0.5pt)



**Exercice 3 (2.5pts)**

La figure ci-contre représente un graphe pondéré par des distances en km. Répondre en justifiant aux questions suivantes :

- Ce graphe est-il complet ? (0.5pt)
- Y'a-t-il une chaîne eulérienne ? (0.5pt)
- Qu'est-ce qu'un arbre couvrant d'un graphe ? (0.5pt)
- Déterminer un arbre couvrant du graphe ci-contre
  - Par l'algorithme de Kruskal. (0.5pt)
  - Par l'algorithme de Prim. (0.5pt)





### Exercice 4 (5pts)

Soit les fonctions  $f$  et  $g$  définies pour tout réel positif par :  $f(x) = \frac{4x \ln x}{x+1}$  et  $g(x) = x + 1 + \ln x$ .

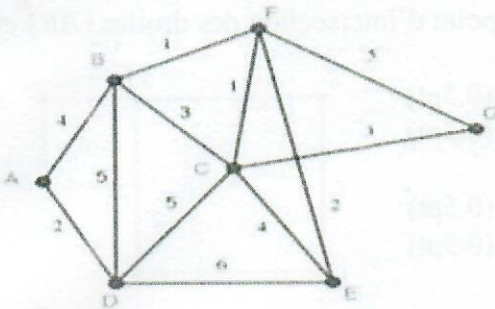
1. Calculer la dérivée  $g'$  de  $g$  et dresser son tableau de variation. (1pt)
2. Montrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$  dont on donnera un encadrement à  $10^{-1}$  près. (1pt)
3. En déduire le signe de  $g(x)$  suivant les valeurs de  $x$ . (0,5pt)
4. Déterminer les limites de  $f$  en 0 et en  $+\infty$  et montrer que pour tout réel strictement positif  $x$ , on a  $f'(x) = \frac{4g(x)}{(x+1)^2}$ . (1pt)
5. Déduire le signe de  $f'(x)$  et dresser le tableau de variation de  $f$ . (0,5pt)
6. Montrer que  $f(\alpha) = -4\alpha$  et déterminer la branche infinie de  $f$ . (0,5pt)
7. Tracer l'allure de la courbe. (0,5pt)

### EVALUATION DES COMPETENCES (4.5pts)

Les études menées par des ingénieurs ont permis au Chef Bahouan de localiser une parcelle dont le sous-sol contient du diamant. Il est établi que la densité en diamant dans cette parcelle est de  $13 \text{ kg}$  par  $\text{km}^2$ . Les relevés topographiques montrent que cette parcelle est délimitée par des points à coordonnées complexes solutions de l'équation  $-iz^4 + 8(-i + \sqrt{3}) = 0$  où  $i$  est le nombre complexe tel que  $i^2 = -1$ . L'unité étant le  $\text{km}$ .

Les engins qui permettront l'extraction de ces diamants ont des effets sonores nuisibles. On définit le niveau sonore par  $N = 10 \log \frac{I}{I_0}$  où  $I$  est l'intensité sonore et  $I_0$  une intensité sonore de référence. Par ailleurs, l'intensité sonore est proportionnelle au carré de la pression acoustique  $P$ . La pression acoustique  $P$  est exprimée en pascal ( $\text{Pa}$ ) et le niveau sonore  $N$  en décibel ( $\text{dB}$ ). Le bruit commence à être perceptible lorsque la pression acoustique est de  $P_1 = 12 \times 10^{-3} \text{ Pa}$  et devient insupportable à  $P_2 = 30 \times 10^{-2} \text{ Pa}$ . On donne  $P_0 = 20 \times 10^{-6} \text{ Pa}$ .

Les points d'extraction des diamants sont marqués par les lettres  $A, B, C, D, E, F$  et  $G$  comme l'indique la figure ci-dessous. Le Chef voudrait savoir le plus court chemin partant du point  $A$  pour n'importe quel point du site. Les nombres marqués sont des distances en  $\text{hm}$  et il dépense  $720F$  pour  $1 \text{ hm}$ .



- Tache 1.** Aider le Chef à déterminer la masse de diamant qu'il peut récolter dans cette parcelle. (1.5pt)
- Tache 2.** Déterminer l'intervalle du niveau sonore dans lequel le bruit sera perceptible sans nuire. (1.5pt)
- Tache 3.** Le Chef a entendu parler de l'algorithme de Dijkstra et sollicite votre aide dans l'application de cet algorithme. Il veut aussi savoir le prix minimal à payer pour partir de  $A$  pour  $G$ . (1.5pt)

### Grille d'évaluation

	Production	Interprétation correcte de la situation. (0.5pt)	Utilisation correcte des outils : (0.5pt)	Cohérence (0.5pt)
Tache 1				
Tache 2				
Tache 3				