

PARTIE A : EVALUATION DES RESSOURCES / 15,5PTS

Exercice 1 : Arithmétiques / 05pts

- 1) Déterminer les valeurs de l'entier naturel n pour que $\frac{n+17}{n-1} \in \mathbb{Z}$ 0,75pt
- 2) Démontrer que pour tout entier naturel, $2^{3n} \equiv 1 [7]$. 0,5pt
- 3) Déterminer le reste de la division euclidienne de 2011^{2012} par 7. 0,5pt
- 4) Déterminer suivant les valeurs de l'entier naturel n , le reste de la division euclidienne de 2^n par 7. 0,75pt
- 5) Résoudre dans \mathbb{N} , l'équation $n^2 - 3n + 4 \equiv 0 [7]$. 0,5pt
- 6) Montrer que la fraction $\frac{(n+1)^2}{n^2+2n}$ est irréductible pour tout entier naturel non nul. 0,5pt
- 7) Résoudre dans \mathbb{Z}^2 , l'équation $2x - 3y = 0$ 0,5pt
- 8) Résoudre dans \mathbb{N}^2 le système $\begin{cases} x + y = 420 \\ \text{pgcd}(x, y) = 35 \end{cases}$ 1pt

Exercice 2 : Espaces vectoriels / 02pts

E est un espace vectoriel. $B = (\vec{i}; \vec{j})$ est une base de E et g l'endomorphisme de E qui à tout vecteur $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ de E associe : $(\vec{u}) = (-2x + y)\vec{i} + (4x - 2y)\vec{j}$

1. Déterminer la matrice A de g dans la base B . 0,25pt
2. Déterminer le noyau Kerg de g et l'image Img de g . On précisera une base de chaque sous espace vectoriel. 0,5pt
3. g est-il un automorphisme de E ? justifier. 0,5pt
4. Soient $\vec{e}_1 = \vec{i} + \vec{j}$ et $\vec{e}_2 = -\vec{i} + 2\vec{j}$
 - a) Montrer que $B' = (\vec{e}_1; \vec{e}_2)$ est une base de E . 0,25pt
 - b) Trouver la matrice A' de g dans la nouvelle base B' . 0,5pt

EXERCICE 3 : Fonctions Numériques / 4,5pts

Soient les fonctions f et g définies sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{2\ln x}{x^2+x} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{x+1}{2x+1} - \ln x.$$

(c) désigne la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (O, I, J) .

1. a) Déterminer les limites de g à droite de 0 et en $+\infty$. 0,5pt
 - b) Calculer la dérivée de g et en déduire le tableau de variations de g 0,75pt
 - c) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $]1; 2[$ 0,5pt
2. a) Déterminer les limites de f à droite de 0 et en $+\infty$ 0,5pt
 - b) En déduire les asymptotes de (c). 0,25pt
 - c) Calculer la dérivée de f et démontrer que pour tout $x \in]0; +\infty[$, $f'(x)$ a le même signe que $(2x+1)g(x)$ 0,75pt
 - d) Dresser le tableau de variations de f dans $]0; +\infty[$. 0,25pt
3. a) démontrer que $f(\alpha) = \frac{2}{\alpha(2\alpha+1)}$ 0,5pt
 - b) tracer (c) 0,5pt

EXERCICE 4 : Nombres complexes / 4pts

On considère le polynôme P défini par : $P(z) = z^3 - (1 + i)z^2 + (2 + 6i)z + 8$

1. Démontrer que l'équation $P(z) = 0$ admet une solution imaginaire pure dont on déterminera 0,5pt
2. Déterminer les nombres complexes a , b et c tels que :
 $P(z) = (z - 2i)(az^2 + bz + c)$ 0,5pt
3. Déterminer sous forme algébrique les racines carrées de $-18i$ 0,5pt
4. Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $P(z) = 0$ 0,5pt
5. On désigne par Z_A , Z_B et Z_C les solutions de l'équation $P(z)=0$ tels que :
 $I_m(Z_C) < I_m(Z_A) < I_m(Z_B)$
 - a) Démontrer que ABC est rectangle en A 1pt
 - b) Soit D le point d'affixe $-1 - i$. Démontrer que les points A , B , C et D sont cocycliques. 1pt

PARTIE B : EVALUATION DES COMPETENCES / 4,5 PTS

MISSE a une entreprise de fabrication des téléphones dont le coût moyen de production en millions de francs est donné par la fonction : $g(x) = \frac{x}{3} - \ln\left(\frac{x+1}{3}\right)$ où x est le nombre de téléphones fabriqué avec $x \in [0 ; 50]$. Son voisin DABO qui fait plutôt dans la ferme lance 2 000 poulets le 1^{er} Janvier 2018 et constate que ses sujets s'augmentent de 20% chaque année. En 2020, DABO a vendu une partie de ses sujets dont le montant est défini par la fonction $M(n) = 9000 \ln(25n + 6364)$ où n est le nombre de poulets vendu et $M(n)$ le montant en centaines de milliers de francs pour s'acheter un congélateur en occasion de 80 000 F.

Taches :

1. Quel est cout moyen minimal de production des téléphones de MISSE ? 1,5pt
2. En quelle année DABO aura dans sa ferme 10 fois le nombre de poulets initialement lancé ? 1,5pt
3. Quel est le nombre de poulets que DABO doit vendre pour acheter son congélateur ? 1,5pt