



## EVALUATION HARMONISÉE N° 3 EPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Classe : T<sup>le</sup>D      Durée : 4 heures      Coef. : 4  
**PARTIE A : EVALUATION DES RESSOURCES : 15,5 points**

### EXERCICE 1 : 04,5 points

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{u}, \vec{v})$

- Déterminer l'écriture complexe de l'homothétie  $h$  de centre D d'affixe  $3 - 5i$  et de rapport 2  
0,25pt
  - Déterminer l'écriture complexe de la rotation  $r$  de centre D et d'angle  $\frac{\pi}{3}$ .  
0,5pt
  - Montrer que l'écriture complexe de  $S = h \circ r$  est  
 $z' = (1 + \sqrt{3}i)z + 5\sqrt{3} - 3\sqrt{3}i$   
0,5pt
  - Donner la nature et les éléments caractéristiques de  $S$ .  
0,5pt
- Soit  $f$  l'application du plan dans lui-même d'expression analytique  $\begin{cases} x' = x - y\sqrt{3} + 2\sqrt{3} \\ y' = x\sqrt{3} + y - \sqrt{3} \end{cases}$ 
  - Déterminer l'écriture complexe de  $f$ .  
0,5pt
  - Quelle est la nature de  $f$  ?  
0,25pt
- Dans le plan complexe, rapporté à un repère orthonormé  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ , on considère les points A, B et C D'affixes respectives  $3; 2i$  et  $2 + 5i$ .  $S'$  est la similitude directe de centre A qui transforme B en C.
  - déterminer l'écriture complexe de  $S'$   
0,5pt
  - Soit D l'image de C par  $S'$ . Déterminer l'affixe du point D.  
0,5pt
  - Quelle est la nature du triangle ACD ?  
0,5pt
  - Déterminer l'image par  $S'$  du cercle de centre C et de rayon 4cm.  
0,25pt

### EXERCICE 2 : 03,5 points

- Soit la suite des nombres complexes  $(z_n)$  définie par  $\begin{cases} z_0 = 1 + i \\ z_{n+1} = (-1 - i)z_n \end{cases}$ 
  - Montrer que la suite  $(r_n)$  définie par  $r_n = |z_n|$  est géométrique.  
0,25pt
  - Montrer que  $\theta_{n+1} = \theta_n - \frac{3\pi}{4}$  où  $(\theta_n)$  est la suite définie par  $\theta_n = \arg(z_n)$  et en déduire la nature de la suite  $(\theta_n)$ .  
0,5pt
  - En déduire l'expression de  $r_n; \theta_n$  et  $z_n$  en fonction de  $n$ .  
0,75pt
- Linéariser à l'aide des formules d'Euler  $\cos^5 x$  et  $\sin^3 x$ .  
1pt
  - En déduire les primitives de la fonction  $f$  définie par  
 $f(x) = 6x^2(3x^3 + 7) + \frac{8x-4}{(x^2+x-3)^3} + \cos^5 x - \sin^3 x + \sqrt{2x+4}$   
1pt

### EXERCICE 3 : 05 points



La fonction numérique  $f$  est définie par  $f(x) = \frac{x^2-3x+6}{x-1}$

1. Etudier les variations de  $f$  et dresser son tableau de variations. 1pt
2. étudier le comportement de  $f$  à l'infini (branches infinies). 0,5pt
3. montrer que le point  $A\left(\frac{1}{-1}\right)$  de rencontre des asymptotes est centre de symétrie de  $(C_f)$  la courbe de  $f$ . 0,5pt
4. Tracer  $(C_f)$  et ses asymptotes dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ . 1pt
5. Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite numérique définie par :  $\begin{cases} u_0 = 10 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ 
  - a) Montrer par récurrence, que  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 3$ . 0,5pt
  - b) Montrer que la suite  $(u_n)$  est décroissante. 0,5pt
  - c) En déduire que  $(u_n)$  est convergente. 0,25pt
  - d) Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $f(a) = a$  0,5pt
  - e) Déterminer la limite de  $(u_n)$  0,25pt

**EXERCICE 4: 03,5 points**

On considère la fonction  $h$  définie par  $h(x) = \frac{x+2}{x+1}$  et on pose  $I = [1; 2]$

1. Etudier les variations de  $h$  sur  $I$ . 0,5pt
2. Sans résoudre, montrer que l'équation  $h(x) = x$  admet une unique solution  $\beta \in I$ . 0,5pt
3. Montrer que  $\forall x \in I, |h'(x)| \leq \frac{1}{4}$ . 0,5pt
4. On définit dans  $\mathbb{N}$  la suite  $(U_n)$  par :  $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = h(U_n) \end{cases}$ 
  - a) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $U_n \in I$ . 0,5pt
  - b) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}, |U_{n+1} - \beta| \leq \frac{1}{4} |U_n - \beta|$ . 0,5pt
  - c) Démontrer par récurrence que pour tout  $n \in \mathbb{N}, |U_n - \beta| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$ . 0,5pt
  - d) En déduire la limite de la suite  $(U_n)$ . 0,5pt

**PARTIE B : EVALUATION DES COMPETENCES : 4,5 points**

On a analysé les effets de la puissance sonore dans une discothèque. Le son se manifeste par des variations de pression de l'air. L'unité de mesure de la pression de l'air est le pascal. La pression de l'air s'exerce sur le tympan de l'oreille humaine. Pour une pression supérieure ou égale à  $20 \times 10^{-6}$  pascals s'exerçant sur son tympan, l'oreille humaine perçoit un son dont la puissance se mesure en décibels.

Pour une pression de  $p$ -pascals s'exerçant sur le tympan, avec  $p \geq p_0, p_0 = 20 \times 10^{-6}$ . La puissance sonore perçue est égale à  $f(p) = \frac{20}{\ln 10} \ln(50000p)$ . A partir d'une puissance sonore de 120 décibels, on ressent une douleur qui peut causer un cancer sur le tympan. Par ailleurs des études cliniques ont montré que ce cancer peut augmenter son volume en moyenne de 2% par mois et si ce cancer multiplie son volume initial par 10, il envahit tout le tympan et le détruit.

1. Déterminer la pression  $p$  à partir de laquelle on peut ressentir des douleurs. 1,5pt
2. Montrer que la puissance sonore augmente de 20 décibels quand la pression s'exerçant sur le tympan est multipliée par 10. 1,5pt
3. Déterminer après combien de mois un discothécaire atteint de ce cancer peut perdre son sens auditif. 1,5pt