Année scolaire 2019-2020

Date : 05 février 2020

MINI SESSION

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Niveau : TC Durée : 4 h

Exercice 1 : 5,5 points

1) Calculer chacune des intégrales suivantes : $\int_0^{\ln 3} \frac{1}{1+e^x}dx$; $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos x}dx$ et $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2x^3+x^2+2x+3}{1+x^2}dx$. 1,5pt

2) A l'aide deux intégrations par parties, calculer $\int_0^{\pi} e^x \cos x dx$. 0,5pt

3) On considère les suites numériques (a_n) et (b_n) définies pour tout entier naturel non nul n par

$a_n = \int_0^1 x^n \cos x dx$ et $b_n = \int_0^1 x^n \sin x dx$.

a) Calculer a_1 et b_1. 0,5pt

b) Montrer que la suite (a_n) est à termes positifs et décroissante. 0,5pt

c) En déduire que la suite (a_n) est convergente. 0,25pt

d) Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, $0 \leq a_n \leq \frac{1}{n+1}$. 0,5pt

e) En déduire la limite de la suite (a_n). 0,25pt

f) À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que pour tout entier naturel n non nul, $a_{n+1} = -(n+1)b_n + \sin 1$. 0,5pt

g) En déduire la limite de la suite (b_n). 0,25pt

h) Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, $b_{n+1} = (n+1)a_n - \cos 1$. 0,5pt

i) En déduire la limite de la suite (na_n). 0,25pt

Exercice 2 : 5 points

On considère les fonctions f et g définies sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \ln(1 + xe^{-x})$ et $g(x) = \ln(x + e^x)$. On désigne (C_f) et (C_g) les courbes représentatives des fonctions f et g dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 2 cm.

1) Étudier les variations de la fonction g et dresser son tableau des variations. 0,75pt

2) Étudier les variations de la fonction f et dresser son tableau des variations. 0,75pt

3) Montrer que pour tout réel x de $[0; +\infty[$, $f(x) = g(x) - x$. En déduire la position relative des courbes des fonctions f et g. 0,5pt

4) Tracer soigneusement les courbes (C_f) et (C_g). 0,75pt

5) Calculer en centimètres carrés, l'aire du domaine plan fermé délimité par les courbes (C_f) et (C_g) et la droite d'équation $x = 2$. 0,5pt

6) Soit λ un réel strictement positif. On pose $A(\lambda)$, l'aire en centimètres carrés du domaine plan délimité par la courbe de la fonction f et les droites d'équations $y = 0; x = 0$ et $x = \lambda$.

a) Montrer que $A(\lambda) \leq 4\lambda f(1)$. 0,5pt

b) À l'aide d'une intégration par parties, calculer en fonction de λ, $\int_0^{\lambda} te^{-t}dt$. 0,5pt

c) Montrer que pour tout réel t supérieur ou égal à zéro, $\ln(1 + t) \leq t$. 0,5pt

d) En déduire que $A(\lambda) \leq 4 - 4e^{-\lambda} - 4\lambda e^{-\lambda}$. 0,25pt

Exercice 3 : 4,5 points

1) Soit (U_n) la suite définie pour tout entier naturel non nul n, par $U_n = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

a) Montrer que pour tout réel x, $1 - x^2 + x^4 - \cdots + (-1)^n x^{2n} - \frac{1}{1+x^2} = (-1)^n \frac{x^{2n+2}}{1+x^2}$. 0,5pt

b) En déduire que : $U_n - \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx = (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{1+x^2}\,dx.$ **0,75pt**

c) Montrer que pour tout réel $x \in [0,1]$, $\frac{x^{2n+2}}{1+x^2} \leq x^{2n+2}$. **0,25pt**

d) En déduire que $\left|U_n - \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}\right| \leq \frac{1}{2n+3}$ **0,5pt**

e) En déduire que la suite est convergente et déterminer sa limite. **0,5pt**

2) On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \frac{e^{-x}}{1+2e^{x}}$.

a) Déterminer le réel a tel que pour tout réel x, $h(x) = e^{-x} - a\frac{e^{-x}}{2+e^{-x}}$. **0,5pt**

b) En déduire $\int_0^{-\ln 4} \frac{e^{-x}}{1+2e^{x}}\,dx$. **0,5pt**

3) On considère la fonction k définie sur $]1;+\infty[$ par $k(x) = \frac{1}{x^2-1} - \frac{\ln(1+x)}{(x-1)^2}$.

c) Déterminer les fonctions u et v dérivables sur $]1;+\infty[$ telles que pour tout réel x de $]1;+\infty[$, **0,5pt**
$k(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$.

d) En déduire $\int_2^3 [\frac{1}{x^2-1} - \frac{\ln(1+x)}{(x-1)^2}]dx$. **0,5pt**

Exercice 4 : 5 points

1) On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation d'inconnue z (E) :
$z^3 + 8z^2 + 24z + 32 = 0$ et les points A, B et C d'affixes respectives $-2+2i$; $-2-2i$ et -4.

a) Démontrer que l'équation (E) admet une unique solution réelle notée α. On ne demande pas de déterminer α. **0,75pt**

b) Démontrer que si z_0 est une solution de l'équation (E), alors $\overline{z_0}$ l'est aussi. **0,25pt**

c) Déterminer un nombre réel a pour que le nombre complexe $a + 2i$ soit une solution de l'équation (E). **0,5pt**

d) Résoudre alors l'équation (E) dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes. **0,5pt**

e) Quelle est la nature exacte du triangle ABC. Justifier la réponse. **0,5pt**

f) Déterminer l'écriture complexe de la rotation de centre C qui transforme A en B. **0,5pt**

2) On considère deux urnes U_1 et U_2. L'urne U_1 contient 4 boules rouges et 5 boules blanches. L'urne U_2 contient 2 boules rouges et 7 boules blanches. Toutes ces boules sont indiscernables au toucher. On réalise un jeu de la façon suivante :

Étape 1 : On tire au hasard une boule dans U_1, on note sa couleur et on la remet dans U_1.

Étape n $(n \geq 2)$: Si la boule tirée à l'étape $(n-1)$ est rouge, on tire au hasard une boule dans U_1. Si par contre la boule tirée à l'étape $(n-1)$ est blanche, on tire au hasard une boule dans U_2. On note A_n l'évènement : « le tirage a lieu dans U_1 à l'étape n» et P_n sa probabilité et B_n l'évènement : « tirer une boule blanche à l'étape n» et q_n sa probabilité. On rappelle que $P_n = 1$.

a) Calculer q_2 et P_2. **0,5pt**

b) En utilisant un arbre pondéré, montrer que $P_{n+1} = \frac{2}{9}P_n + \frac{2}{9}$. **0,5pt**

c) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel non nul n, $P_n \geq \frac{2}{7}$. **0,25pt**

d) En déduire que la suite (P_n) est décroissante. **0,25pt**

e) En déduire que la suite (P_n) est convergente et déterminer sa limite. **0,5pt**