Ministère des Enseignements Secondaires
Collège Bilingue DU VAAL

Année scolaire 2023/2024
Epreuve : Mathématiques
Classe : Tle **Série : D**
Durée : 4h **Coef : 4**

Evaluation de la 4e période - Session de Février 2024.

L'épreuve est notée sur 40 et comporte deux parties A et B réparties sur deux pages.

PARTIE A : Évaluation des ressources/ **(30 points)**

Cette partie est constituée de quatre exercices indépendants numérotés de 1 à 3.

EXERCICE 1/ **(06 points)**

Pour chacune des questions suivantes, quatre propositions vous sont proposées, choisir la bonne et l'écrire sur votre feuille de composition sans justification. **1,5x4=6pts**

1) Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme $u_0 = 2$ et de raison $\frac{1}{3}$. A partir de quel indice n, les termes de la suite sont-ils strictement inférieurs à 0,0001 ?
   a) $n = 11$ b) $n = 12$ c) $n = 10$ d) $n = 9$
2) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + 1 - \sqrt{x^2 + 1}$. La courbe (C_f) de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ admet en $-\infty$ une asymptote d'équation :
   a) $y = 2x + 1$ b) $y = -2x + 1$ c) $y = 2x$ d) $y = 2x - 1$.
3) Le tableau suivant donne le nombre de kg perdus par des patients diabétiques pendant une période (en mois) de cure.

Durée X (en mois)	3	1	2	4	5
Nombre Y de kg perdus	6	4	5	9	11

   La droite régression de Y en X est :
   a) $y = 1{,}8x + 1{,}6$ b) $y = 1{,}7x + 1{,}8$ c) $y = 1{,}9x + 1{,}3$ d) $y = 2{,}1x + 0{,}8$
4) On a dans le plan complexe les points A, B et C d'affixes respectives $a = -1 - 2i$, $b = 1 + i$ et $c = 4 - i$. S désigne la similitude directe de centre A transformant B en C. l'expression analytique de S est :

a) $\begin{cases} x' = x + y - 2 \\ y' = x + y - 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x' = x - y - 2 \\ y' = -x + y - 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x' = x + y - 2 \\ y' = -x + y - 1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x' = x + y + 2 \\ y' = -x + y - 1 \end{cases}$

EXERCICE 2/ **(11 points)**

A) On considère la fonction f définie sur l'intervalle $I = [0; 4]$ par $f(x) = \left(\frac{4\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}}\right)^2$.

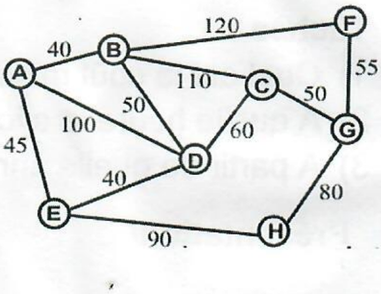
1 a) Montrer que $f'(x) = \frac{32}{(2+\sqrt{x})^3}$ et en déduire les variations de f sur I. **1,5pt**

b) Montrer que f réalise une bijection de I vers un intervalle J à préciser et $f(I) \subset I$. **1pt**

1) On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

   a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq 4$ **1,5pt**
   b) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n > 0$ **1pt**
   c) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. **0,5pt**
   d) Résoudre dans I l'équation $f(x) = x$ puis déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$. **2pts**

B) On nomme A, B, C, D, E, F, G et H les sommets d'un graphe pondéré $\mathcal{g}$ ci-contre.



1) Le graphe $\mathcal{g}$ est-il complet ? justifier votre réponse. **0,5pt**
2) Le graphe $\mathcal{g}$ est connexe ? justifier votre réponse **0,5pt**
3) Déterminer le degré et la taille de ce graphe. **1pt**
4) Montrer que le graphe $\mathcal{g}$ admet une chaîne eulérienne et en donne un exemple. **1,5pt**

EXERCICE 3/ **(13 points)**

A) On donne le polynôme $P(z) = z^3 - (2\sqrt{2}+3)z^2 + 3(1+2\sqrt{2})z - 9$.

1 a) Vérifier que $P(3) = 0$. **0,5pt**

b) Déterminer les réels a et b tels que, $\forall z \in \mathbb{C}$, on ait $P(z) = (z-3)(z^2+az+b)$. **1pt**

c) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$. **1pt**

2. Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O;I;J)$, on considère les points A, B et C d'affixes respectifs 3, $\sqrt{2}-i$ et $\sqrt{2}+i$. Soit D un point d'affixe z_D.

a) Calculer $\frac{z_A - z_B}{z_A - z_C}$ et en déduire la nature du triangle ABC. **1pt**

b) Déterminer z_D pour que le quadrilatère ABCD soit un parallélogramme. **1pt**

3) On considère la rotation r de centre Ω d'affixe $\omega = 2i$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$ et h l'homothétie de centre Ω et de rapport -2.

a) Montrer que l'écriture complexe de r est $z' = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z + \sqrt{3} + i$. **1pt**

b) Déterminer l'écriture complexe de h et déterminer les images de A et B par h. **1,5pt**

c) Déterminer l'écriture complexe de l'application $f = h o r$ et en déduire la nature et les éléments caractéristiques de f. **2pts**

B) Trois nombres complexe z_1, z_2 et z_3 ont produit -8. Leurs arguments respectifs θ_1, θ_2 et θ_3 sont les termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison $\frac{\pi}{6}$ et leurs modules respectifs r_1, r_2 et r_3 sont les termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $\sqrt{2}$.

1) Montrer que $r_1 r_2 r_3 = 8$ et $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = (2k+1)\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$. **1pt**

2) Déterminer r_1, r_2 et r_3. **1,5pt**

3) sachant que $\theta_1 \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, déterminer θ_1, θ_2 et θ_3. **1,5pt**

PARTIE B : Évaluation des compétences/ **(09 points)**

Un pays P compte actuellement 6 millions d'habitants. Cette population s'accroit naturellement chaque année de 10%. Par ailleurs, chaque année ce pays attire un million d'immigrés qui s'y installent définitivement. Ce pays souhaite stopper l'immigration lorsque sa population atteindra 86 millions d'habitants.

Les lettres du tableau ci-dessous représentent les villages d'un arrondissement de ce pays et les nombres représentent en km la distance à parcourir sur une route qui relie un village à un autre lorsqu'elle existe. Un ingénieur voudrait installer les fibres optiques dans ces villages en utilisant les câbles qui coutent 850 FCFA le mètres en partant d'un village quelconque. Un cycliste, qui roule à une vitesse constante de $30Km/h$, part du village A à 8h10min pour arriver au village H le plutôt possible.

	B	C	D	E	F	G	H
A	50			70	20		
B		70		10			
C				60			
D		40					
E			55		35		20
F						20	35
G							50
H			55				

Tâches

1) Quel est le coût minimal à utiliser pour couvrir les 7 villages de la fibre optique ? **3pts**

2) A quelle heure le cycliste arrivera au village H ? **3pts**

3) A partir de quelle année ce pays P stoppera-t-il l'immigration ? **3pts**

Présentation/ **1pt**