Ministère des Enseignements Secondaires
Collège Bilingue DU VAAL

Année scolaire 2023/2024
Epreuve : Mathématiques
Classe : Tle Série : C
Durée : 4h Coef : 7

Evaluation de la 4e période - Session de Février 2024.

L'épreuve est notée sur 40 et comporte deux parties A et B réparties sur deux pages.

PARTIE A : Évaluation des ressources/ (30 points)

Cette partie est constituée de quatre exercices indépendants numérotés de 1 à 3.

EXERCICE 1/ (08 points)

I) On considère le nombre complexe $z = e^{i\theta} - ie^{-i\theta}$, où θ est un nombre réel.

1) Démontrer que $z = z_0 \cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)$ où z_0 est un nombre complexe indépendant de θ. **1pt**

2) Donner le module et un argument de z pour $\theta \in \left]-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right[$ et pour $\theta \in \left]-\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right[$. **1pt**

II) 1.a) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$, l'équation (E) : $2x - 3y = 5$. **0,75pt**

b) En déduire les solutions dans $\mathbb{Z}$ du système (S) $\begin{cases} n + 8 \equiv 0[2] \\ n + 3 \equiv 0[3] \end{cases}$. **0,75pt**

2) les âges sont exprimés en années. En 2009, l'âge d'un père est compris entre 50 et 55 ans pendant que l'âges de ses deux enfants Talla et Mbarga sont respectivement a et b. En 2001, l'âge du père était le double de celui de Talla ; et en 2006, l'âge du père dépassait de 3ans le triple de l'âge de Mbarga. Quels sont les âges du père et ses deux enfants. **1,5pt**

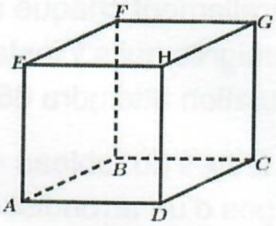
III) Le tableau suivant donne le nombre de kg perdus par des patients diabétiques pendant une période (en mois) de cure.

Durée X (en mois)	3	1	2	4	5
Nombre Y de kg perdus	6	4	5	9	11

Déterminer la droite régression de Y en X en déduire le nombre de kg perdus pour une durée de 8 mois **3pts**

EXERCICE 2/ (12 points)

I) On considère le cube ABCDEFGH d'arête 1 représenté ci-contre. On désigne par I, J et K les milieux respectifs des segment $[BC]$, $[BF]$ et $[HC]$. L'espace est rapporté au repère orthonormal $(A;\vec{\imath};\vec{\jmath};\vec{k})$ avec $\vec{\imath} = \overrightarrow{AB}$; $\vec{\jmath} = \overrightarrow{AD}$ et $\vec{k} = \overrightarrow{AD}$.



1) Déterminer l'équation cartésienne du plan (IJK). **2pts**
2) Déterminer l'expression analytique de la réflexion $S_{(P)}$ de base le plan (P) d'équation cartésienne $4x + 2y + 2z - 5 = 0$. **1,5pt**
3) Donner la nature exacte et caractériser la transformation $S_{(HJK)} o S_{(ADC)}$. **1pt**
4) Donner la nature de de la figure géometrique (HBCD), puis la nature de son image par la réflexion $S_{(AEK)}$. Justifier clairement votre réponse. **1,5pt**

II) Dans l'espace ε rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath};\vec{k})$. On considère l'application h qui à tout point $M(x;y;z)$ associe le point $M'(x';y';z')$ tel que $\begin{cases} x' = \frac{1}{3}(-x + 2y - 2z + 2) \\ y' = \frac{1}{3}(2x + 2y + z - 1) \\ z' = \frac{1}{3}(-2x + y - 2z + 1) \end{cases}$.

1) Déterminer l'ensemble (π) des points invariants par h. **1pt**
2) Démontrer que pour tout point M de l'espace, si M un point n'appartenant pas à (π) et $M' = h(M)$ alors le point I milieu du segment $[MM']$ appartient à (π) et que le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ a une direction fixe. **1,5pt**
3) Reconnaitre et caractériser l'application h. **0,5pt**

III) On considère deux vecteurs unitaires orthogonaux $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'espace vectoriel orienté E de dimension 3 et l'application f de E dans E définie par : pour tout vecteur $\vec{w}$ de E, $f(\vec{w}) = (\vec{v} \wedge \vec{w}) \wedge \vec{u}$.

1) Montrer que f est un endomorphisme puis déterminer $kerf$. **2pts**

2) On pose $\vec{x} = \vec{v} \wedge \vec{u}$. Ecrire la matrice de f dans la base $(\vec{u}; \vec{v}; \vec{x})$. **1pt**

EXERCICE 3/ **(12 points)**

I) Soit f et m les fonctions définies sur $]0;2[$ par $f(x) = \tan\left[\frac{\pi}{2}(x-1)\right]$ et $m(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

1) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation. **2,5pts**

2) On désigne par g la bijection réciproque de f sur $]0;2[$. Déterminer $g(1)$ et montrer que pour tout réel x, on a $g'(x) = \frac{2}{\pi(x^2+1)}$. **1,5pt**

3) On désigne par M une primitive de m sur $\mathbb{R}$, calculer $\mathcal{A} = M(1) - M(0)$. **1,5pt**

4) Soit h la fonction définie par $h(x) = g(x) + g\left(\frac{1}{x}\right)$.

a) Déterminer l'ensemble de définition de h. **0,75pt**

b) Déterminer $h'(x)$. **1pt**

c) En déduire que pour tout réels positifs x, $h(x) = 3$. **0,75pt**

II) Soit u la fonction définie sur $\left]-\infty; \frac{1}{2}\right[$ par $u(x) = x\sqrt{1-2x}$. Déterminer les réels a, b et c tels que la fonction $\mathcal{U}$ définie sur $\left]-\infty; \frac{1}{2}\right[$ par $\mathcal{U}(x) = (ax^2 + bx + c)\sqrt{1-2x}$ soit une primitive de u. **1,5pt**

III) Soit φ la fonction définie sur $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ telle que $\varphi(x) = \frac{\sin x}{cos^3 x}$.

1) Montrer que pour tout réel $x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$, $\varphi'(x) = \frac{3}{cos^4 x} - \frac{2}{cos^2 x}$. **1,5pt**

2) En déduire la primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{cos^4 x}$ qui prend la valeur 1 en $\frac{\pi}{4}$. **1pt**

PARTIE B : Évaluation des compétences/ **(09 points)**

Un pays P compte actuellement 6 millions d'habitants. Cette population s'accroit naturellement chaque année de 10%. Par ailleurs, chaque année ce pays attire un million d'immigrés qui s'y installent définitivement. Ce pays souhaite stopper l'immigration lorsque sa population atteindra 86 millions d'habitants.

Les lettres du tableau ci-dessous représentent les villages d'un arrondissement de ce pays et les nombres représentent en km la distance à parcourir sur une route qui relie un village à un autre lorsqu'elle existe. Le chef du village A souhaite acheter un parcelle de terrain dans le village H à 7500 FCFA le mètre carré .il faire appel à un topographie qui se rend sur les lieux et lui ramène l'information selon laquelle ce terrain est quadrilatère WXYZ où les sommets W, X, et Y ont pour affixes respectives $-1-2i$; $1+i$ et $4-i$ dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$ d'unité le décamètre. Le sommet Z est l'image de Y par une similitude directe de centre W qui transforme X en Y. le chef du village quitte son domicile 6h10min pour la rencontre de son homologue pour finaliser l'achat du terrain, muni de sa bicyclette qui roule à une vitesse constante de $30Km/h$.

	B	C	D	E	F	G	H
A	50			70	20		
B		70		10			
C				60			
D		40					
E			55		35		20
F						20	35
G							50
H			55				

Tâches

1) Déterminer le coût exact de l'achat du terrain par le chef ? **3pts**

2) Déterminer l'heure à laquelle les deux chefs se rencontreront le plus tôt possible ? **3pts**

3) A partir de quelle année ce pays P stoppera-t-il l'immigration ? **3pts**

Présentation/ **1pt**