

### ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

*L'épreuve comporte trois exercices et un problème, tous obligatoires. Le candidat devra se montrer rigoureux et clair dans la rédaction.*

**EXERCICE 1 : 03,25 points** Dans l'ensemble  $W$  des vecteurs de l'espace, on définit l'endomorphisme  $\varphi$  par  $\varphi(\vec{i}) = \vec{i}$  et  $\varphi(\vec{j}) = \varphi(\vec{k}) = \vec{j} - \vec{k}$ .

- 1.1. Donner la matrice de  $\varphi$  dans la base  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . [0,25pt]
- 1.2. Déterminer une base de  $\text{Ker } \varphi$ , le noyau de  $\varphi$  et une base de  $\text{Im } \varphi$ , l'image de  $\varphi$ . [0,5pt]
- 1.3. Montrer que  $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{k})$  est une base de  $W$  avec  $\vec{a} = \vec{j} - \vec{k}$  et  $\vec{b} = \vec{j} + \vec{k}$ . [0,5pt]
- 1.4. Donner la matrice  $M$  de  $\varphi$  dans la base  $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{k})$ . [0,5pt]
- 1.5. Pour tout entier naturel  $n$ , exprimer  $M^n$  en fonction de  $n$ . [0,25pt]
2. PQR est un triangle rectangle en P tel que  $PQ = 3$  et  $PR = 2k$ ,  $k > 0$ .  
Déterminer l'ensemble des points M de l'espace tels que  $-PM^2 + 4QM^2 + 3RM^2 = 39$ . [0,75pt]
3. A, B et C sont des points distincts de l'espace.  
Déterminer l'ensemble des points M de l'espace tels que  $\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{BM} = 2\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{CM}$ . [0,5pt]

### EXERCICE 2 : 03,25 points

ABCD est un carré de sens direct et de centre K. Soit P un point de la droite (BC), distinct de B. Les droites (AP) et (CD) se coupent en E. La perpendiculaire à (AP) passant par A, coupe (BC) en R et (CD) en T.

1. Soit  $r$  la rotation de centre A et d'angle  $\frac{\pi}{2}$ .
  - 1.1. Déterminer l'image de la droite (BC) par  $r$ . [0,5pt]
  - 1.2. En déduire les images de chacun des points P et R par la rotation  $r$ . [0,5pt]
2. Soit  $s$  la similitude directe de centre A, de rapport  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  et d'angle  $\frac{\pi}{4}$ .  
On désigne par M le milieu du segment [RE] et par N le milieu du segment [PT].
  - 2.1. Déterminer, en le justifiant, les images par  $s$  des points B, R et P. [0,75pt]
  - 2.2. Déterminer le lieu géométrique du point N lorsque P décrit la droite (BC) privée de B. [0,5pt]
3. En déduire que les points M, B, K, D et N sont alignés. [0,75pt]

### EXERCICE 3 : 03,5 points

1.  $(C)$  est un cercle de centre O, et A est un point de  $(C)$ . Soit M un point de  $(C)$  et P le symétrique de M par rapport à O. La parallèle à (OA) passant par M coupe la droite (AP) en N.  
Déterminer le lieu géométrique de N lorsque M décrit  $(C)$ . [1pt]
2. On donne l'équation (E) :  $5x - y = -3$ 
  - 2.1. Résoudre (E). [0,5pt]
  - 2.2. Soit les suites  $(x_n)$  et  $(y_n)$  définies sur  $\mathbb{N}$  par :  $\begin{cases} x_0 = 1 \\ x_{n+1} = 4x_n + 2 \end{cases}$  et  $\begin{cases} y_0 = 8 \\ y_{n+1} = 4y_n + 1 \end{cases}$ 
    - 2.2.1. Démontrer que, pour tout entier naturel  $n$ , le couple  $(x_n, y_n)$  est solution de (E). [0,5pt]
    - 2.2.2. En déduire que si  $x_n$  et  $y_n$  ne sont pas divisibles par 3, alors ils sont premiers entre eux. [0,5pt]
  - 2.3. On pose  $u_n = x_n + a$  et  $v_n = y_n + b$  où  $a$  et  $b$  sont des nombres réels.
    - 2.3.1. Trouver les valeurs de  $a$  et  $b$  pour que les suites  $u$  et  $v$  soient géométriques. [0,5pt]
    - 2.3.2. Déduire  $x_n$  et  $y_n$  en fonction de  $n$  ; puis étudier la convergence de chacune de ces suites. [0,5pt]



**PROBLEME : 10 points**

Le problème comporte trois parties A, B et C. Les parties B et C sont liées.

**Partie A :** Soit  $a$  un nombre complexe non nul de module  $r$  et d'argument  $\theta \in ]-\pi ; \pi]$

- 1) Résoudre dans  $\mathbb{C}$ , l'équation (E) :  $z^2 + a(a + i)z + ia^3 = 0$ . [0,75pt]
- 2) Mettre les solutions sous forme trigonométrique. [0,5pt]
- 3) Déterminer  $a$  pour que les solutions de l'équation (E) soient conjuguées. [0,75pt]

**Partie B : [3 Points]**

Soit la fonction  $f$  définie sur  $K = ]-1; +\infty[$  par  $f(x) = \frac{e^x}{1+x}$ . On note  $(C)$  sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé d'origine  $O$  (unité graphique  $4cm$ )

- 1.1. Etudier les variations de  $f$  et déterminer ses limites aux bornes de  $K$ . [0.75pt]
- 1.2. En déduire que  $(C)$  admet une droite asymptote  $(\Delta)$ , que l'on précisera. [0.25pt]
- 2.1. Ecrire une équation de la tangente  $(T_a)$  à  $(C)$  en un point  $M$  de  $(C)$  d'abscisse  $a$ . [0.5pt]
- 2.2. Montrer qu'il existe deux valeurs de  $a$  pour lesquelles  $(T_a)$  passe par l'origine  $O$ . [0.5pt]
3. Tracer la courbe  $(C)$ . On mettra en évidence la droite  $(\Delta)$  et les tangentes trouvées ci-dessus. [0.5pt]
4. On pose, pour  $x$  dans  $K$ ,  $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ . La fonction  $F$  est-elle monotone ? Est-elle positive ? [0.5pt]

**Partie C : [5 points]**

On pose  $J = \int_0^1 \frac{e^t}{1+t} dt$ . L'objet de cette partie est d'encadrer  $J$ . On ne cherchera pas à calculer la valeur exacte de  $J$ .

1. En utilisant l'étude de la fonction  $f$  réalisée dans la partie A, montrer que :  $1 \leq J \leq \frac{e}{2}$  [0.5pt]
2. On pose, pour tout entier naturel  $n$ ,  $U_n = (-1)^n \int_0^1 t^n e^t dt$
- 2.1. Calculer  $U_0$ . [0.25pt]
- 2.2. Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que  $U_{n+1} = (-1)^{n+1} e + (n+1)U_n$ . [0.5pt]
- 2.3. Calculer alors successivement  $U_1, U_2, \dots, U_6$ . On donnera les réponses sous la forme  $ae - b$ , où  $a$  et  $b$  sont des entiers naturels. [0.75pt]
- 3.1. Montrer que :  $U_0 + U_1 + \dots + U_n = \int_0^1 e^t \frac{1 - (-1)^{n+1} t^{n+1}}{1+t} dt$  [0.5pt]
- 3.2. En déduire que  $J = U_0 + U_1 + \dots + U_n + R_n$  où  $R_n = (-1)^{n+1} \int_0^1 t^{n+1} f(t) dt$  [0.5pt]
- 3.3. Prouver que :  $\frac{1}{n+2} \leq |R_n| \leq \frac{e}{2(n+2)}$ . [0.5pt]
- 4.1. Trouver le plus petit entier naturel  $n$  tel que :  $\frac{e}{2(n+2)} - \frac{1}{n+2} < 0,05$  [0.5pt]
- 4.2. Calculer  $S_6 = U_0 + U_1 + \dots + U_6$  sous la forme  $ae - b$ , où  $a$  et  $b$  sont des entiers naturels. [0.5pt]
- 4.3. Prouver que  $S_6 - \frac{e}{16} \leq J \leq S_6 - \frac{1}{8}$ . [0.5pt]
- 4.4. En déduire de ce qui précède un encadrement de  $J$  d'amplitude 0.05, par deux nombres décimaux. [0.5pt]