Ministère des Enseignements Secondaires
Office du Baccalauréat du Cameroun

Examen : Baccalauréat
Session : 2022
Séries : C / E
Épreuve : MATHEMATIQUES
Durée : 4 heures
Coefficient : 7 / 6

Cette épreuve étalée sur deux pages, est constituée de deux parties indépendantes.

PARTIE A : Évaluation des ressources (15 points)

Exercice 1 : (5 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{e}_1,\vec{e}_2)$.
On considère les points A, B, F et G d'affixes respectives :
$Z_A = 1 + i\sqrt{3}$; $Z_B = -1 - i\sqrt{3}$; $Z_F = 4$ et $Z_G = -4$.

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $z^2 + 2 - 2i\sqrt{3} = 0$. (0,75 pt)
2) Soit s la similitude directe d'expression complexe $z' = (1 - i\sqrt{3})z$.
   a) Donner les éléments caractéristiques de s. (0,75pt)
   b) Quelles sont les images par s des points A et B ? (0,5pt)
3) Soit $(\mathcal{E})$ l'ellipse de foyers A et B et d'excentricité $e = \frac{1}{2}$.
   a) Déterminer une équation de l'image $(\mathcal{E}')$ de $(\mathcal{E})$ par la similitude s. (1pt)
   b) Construire $(\mathcal{E}')$ puis $(\mathcal{E})$ dans le même repère. (1pt)
4) Aicha a choisi au hasard l'un après l'autre, deux points distincts parmi les points O, A, B, F et G comme ceux par lesquels passe l'axe focal de l'ellipse $(\mathcal{E}')$.
Quelle est la probabilité qu'elle ait choisi deux points de l'axe focal de $(\mathcal{E}')$? (1pt)

Exercice 2 : (5 points)

Soit $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ une base d'un espace vectoriel E.
Soit f un endomorphisme de E.

1) Pour k appartenant à $\mathbb{R}$, on considère l'ensemble E_k des vecteurs $\vec{u}$ de E tels que $f(\vec{u}) = k\vec{u}$.
   a) Démontrer que E_k est un sous-espace vectoriel de E. (1pt)
   b) On suppose que f vérifie l'égalité $f \circ f = 2f$.
   Démontrer que $\vec{u} \in Imf$ si et seulement si $\vec{u} \in E_2$. (1pt)
2) On suppose ici qu'on a :
$f(\vec{\imath} + \vec{\jmath}) = 2\vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$;
$f(\vec{\imath} - \vec{\jmath}) = 2\vec{\imath} - 2\vec{\jmath}$;
$f(\vec{\imath} - \vec{\jmath} + \vec{k}) = \vec{0}$.
   a) Démontrer que $f(\vec{\imath}) = 2\vec{\imath}$, $f(\vec{\jmath}) = 2\vec{\jmath}$ et $f(\vec{k}) = -2\vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$. (0,75pt)
   b) Donner la matrice M de f dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. (0,5pt)
   c) Démontrer que $f \circ f = 2f$. (0,5pt)
   d) Déterminer par une de ses bases, le noyau $Kerf$ de f. (0,5pt)
   e) Déterminer l'image Imf de f. On précisera une de ses bases. (0,75pt)

Exercice 3 : (5 points)

f est une fonction définie sur $[0\,;2\pi]$ par $f(x) = e^{-x}\cos x$.

SESSION 2022

$(\mathcal{C}_f)$ est la courbe de f dans un repère orthogonal où en abscisse, on a $2\,cm$ pour unité et en ordonnée $4\,cm$ pour unité.

1) Démontrer que $f''(x) + 2f'(x) + 2f(x) = 0$. **(0,5pt)**

2) Étudier les variations de f et dresser son tableau des variations. **(1,25pt)**

3) a) Démontrer qu'on a $-e^{-x} \leq f(x) \leq e^{-x}$. **(0,5pt)**

b) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de $(\mathcal{C}_f)$ avec les courbes d'équations $y = e^{-x}$ et $y = -e^{-x}$. **(0,75pt)**

4) Sur $[0\,;2\pi]$, tracer dans le même repère, les courbes d'équations $y = e^{-x}$ et $y = -e^{-x}$ puis la courbe $(\mathcal{C}_f)$. **(1pt)**

5) Calculer l'aire de la partie du plan délimitée par $(\mathcal{C}_f)$ et la courbe d'équation $y = e^{-x}$ sur $[0\,;2\pi]$. *On pourra utiliser la question 1).* **(1pt)**

PARTIE B : Évaluation des compétences (5 points)

Situation :

Trois gisements de gaz A, B et C présentant chacun 100 milliards de m^3 de quantité, ont été découverts dans un pays. L'inauguration a eu lieu à une certaine année (année 0) prise comme origine des temps t (en années).

L'exploitation du gaz des gisements A et B avait commencé à la date $t = 0$ et celle du gisement C légèrement avant. Seulement à la date $t = 1$, la quantité totale du gaz extraite de chacun de gisements A et C était de 5,01 milliards de m^3.

- Pour le gisement A et à partir de la 2e année, la quantité de gaz extraite chaque année augmente de 0,75 milliards de m^3 par rapport à celle de l'année précédente.
- Pour les gisements B et C, les ingénieurs pétrochimistes savent que si $q(t)$ est la quantité totale (en milliards de m^3) de gaz extraite de chacun de ces gisements à la date t, alors le taux d'extraction ou de consommation du gaz du gisement à cette date t est $q'(t)$ (milliards de m^3 par an).
  - Au niveau du gisement B, ce taux est $\left(\frac{1}{2t+1} + 0{,}02t\right)$ milliard de m^3 par an.
  - Au niveau du gisement C, ces taux (aux dates t) sont proportionnels aux quantités de gaz extraites à ces dates. À la date $t = 1$ ce taux était 5,01 milliards de m^3 par an.

Tâches :

1) En combien d'années le gisement A s'épuisera-t-il ? **(1,5pt)**
2) Combien d'années d'extraction suffiront à ce pays pour épuiser le contenu du gisement B ? **(1,5pt)**
3) Après l'inauguration, combien d'années faudra-t-il à ce pays pour vider le gisement C de son contenu ? **(1,5pt)**

Présentation : **(0,5pt)**