



Partie A : ÉVALUATION DES RESSOURCES (13,25 points)

Cette partie est constituée de trois exercices indépendants numérotés de 1 à 3.

Exercice 1 : (4 points)

On considère la fonction numérique f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = 36x^2 - 2x^3$

- Montrer que f est une solution sur \mathbb{R} de l'équation différentielle (E) :
 $36y'' + 6y' + y = 2592 - 2x^3$. 1 pt
- Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0, 18]$ et déterminer la valeur de x pour laquelle f atteint son maximum sur cet intervalle. 1,5 pt
- Une région reçoit 36 doses de vaccin à la COVID-19 dont n doses proviennent d'une firme A, n doses proviennent d'une firme B et le reste d'une firme C (avec $1 \leq n \leq 17$).
On tire au hasard et simultanément 3 doses de vaccin du lot.
 - Démontrer que le nombre de tirages donnant une dose de chaque firme est $f(n)$. 0,5 pt
 - Soit $P(n)$ la probabilité de tirer une dose de chaque firme. Exprimer $P(n)$ à l'aide de $f(n)$ et en déduire la valeur de n pour laquelle $P(n)$ est maximale. 1 pt

Exercice 2 : (5 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J) . On considère dans \mathbb{C} l'équation :

$$(E) : z^3 - (6 + i\sqrt{3})z^2 + (11 + 4i\sqrt{3})z - 6 - 3i\sqrt{3} = 0.$$

- Montrer que l'équation (E) $\Leftrightarrow (z^2 - 4z + 3)(z - 2 - i\sqrt{3}) = 0$. 0,5 pt
- Résoudre dans \mathbb{C} l'équation (E). 0,75 pt
- On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives 3, $2 + i\sqrt{3}$, 7 et $11 + 4i\sqrt{3}$.
 - Démontrer que le triangle IAB est équilatéral. 0,5 pt
 - Soit r la rotation de centre le point F et d'angle $\frac{\pi}{3}$; d'écriture complexe :
$$z' = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z + \frac{3}{2} + 2\sqrt{3} + \left(2 - \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)i.$$

Déterminer l'axe du point F et montrer que $r(C) = D$, en déduire alors que le triangle DFC est équilatéral. 1,5 pt
 - Déterminer l'écriture complexe de l'homothétie h qui transforme I en D et B en C. 1 pt
 - Déterminer l'expression complexe de la transformation $s = h \circ r$. 0,75 pt

Exercice 3 : (4,25 points)

On définit les fonctions h et k sur $]0, +\infty[$ par : $h(x) = e^{\frac{x+1}{x}}$ et $k(x) = -x + x \ln x$.

- Démontrer que l'équation $k(x) = 1$ admet une unique solution α dans $[3, 4]$. 1 pt
- Démontrer que $k(x) = 1$ si et seulement si $h(x) = x$. 0,25 pt
- Démontrer que pour tout x élément de $[3, 4]$, $h(x)$ est aussi un élément de $[3, 4]$. 0,5 pt
- Démontrer que $|h'(x)| \leq \frac{1}{2}$ pour tout x élément de $[3, 4]$. 0,5 pt
- Soit U la suite définie par :
$$\begin{cases} U_0 = 3 \\ U_{n+1} = h(U_n), n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$
 - Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $U_n \in [3, 4]$. 0,5 pt



b) Démontrer que pour tout entier naturel n , $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|U_n - \alpha|$.

0,5 pt

c) En déduire que pour tout entier naturel n , $|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

0,5 pt

d) Démontrer que la suite U est convergente et déterminer sa limite.

0,5 pt

Partie B : ÉVALUATION DES COMPÉTENCES (6,75 points)

Situation

Une réserve naturelle contient essentiellement trois espèces de singes : des macaques, des orangs-outangs et des chimpanzés. Les relevés topographiques de cette réserve naturelle simulés dans un laboratoire montrent que celle-ci est limitée, dans un repère orthonormé (O, I, J) à l'échelle 1 cm pour 4 km, par la courbe (C) d'équation $y = x^3 - 3x^2 + 4$, la droite (OI) et les droites (D_1) et (D_2) d'équations respectives $x = -1$ et $x = 2$.

Deux routes rectilignes assimilées aux droites (OJ) et (D) d'équation $x = 1$ divisent la réserve en trois sites distincts :

Le site A contenant des macaques est délimité par la courbe (C) , les droites (OI) , (D_1) et (OJ) .

Le site B contenant des orangs-outangs est délimité par la courbe (C) , les droites (OI) , (OJ) et (D) .

Le site C contenant des chimpanzés est délimité par la courbe (C) , les droites (OI) , (D) et (D_2) .

La densité de la population de macaques est de 15 macaques par km^2 , celle d'orangs-outangs est de 10 orangs-outangs par km^2 et celle des chimpanzés est de 12 chimpanzés par km^2 . Pour protéger certains animaux de la réserve contre les zoonoses (maladies des bêtes), les chercheurs les vaccinent 3 fois. La première vaccination nécessite 1,136 litre de vaccin. La deuxième nécessite 1,54 litre. Les doses de vaccin (en millilitres) par animal sont données par le tableau suivant :

	Macaque	Orang-outang	Chimpanzé
1 ^{re} dose de vaccin	2 ml	1 ml	3 ml
2 ^e dose de vaccin	2 ml	3 ml	4 ml
3 ^e dose de vaccin	2 ml	5 ml	5 ml

Dans la réserve, 15 % de chimpanzés ont une maladie M_1 . Parmi les chimpanzés atteints par la maladie M_1 , 20 % ont une maladie M_2 et parmi les chimpanzés non atteints par la maladie M_1 , 4 % ont la maladie M_2 . On choisit un chimpanzé au hasard pour une étude dans un laboratoire.

Tâches

1. Déterminer le nombre d'animaux de cette réserve.

2,25 pt

2. Déterminer le volume de vaccin en litres nécessaire pour la 3^e vaccination.

2,25 pt

3. Déterminer la probabilité pour que le chimpanzé choisi soit atteint de la maladie M_2 .

2,25 pt